

$E = mc^2$ van Einstein verklaard met middelbare school wiskunde.

Inleiding: veel belangrijke ontdekkingen en bijbehorende wiskundige formules zijn pas te doorgronden nadat de lezer diepgaand wiskunde op universitair niveau heeft gestudeerd. Maar soms is het ook mogelijk om tot een resultaat te komen met wiskundige kennis op middelbare school niveau. Wellicht niet in een vorm van een formeel bewijs, maar wel in een vorm die verklarend is. Het zou interessant zijn om dit te kunnen doen voor de beroemdste formule in de wereld; $E = mc^2$

Op internet is daar veel over te vinden. Eén van die documenten waar dit document voornamelijk op gebaseerd is, is van drs J. Kroesen.

Eerst een stukje historie ter inleiding. Tot ongeveer het jaar 1700 dacht men dat licht een oneindig hoge snelheid moest hebben. Een Deen, meneer Römer, heeft toen een methode bedacht om vast te stellen hoe de snelheid van het licht kon worden bepaald. Hij constateerde dat de manen die rond Jupiter draaien, in een bepaalde tijd van het jaar, vanaf de aarde gezien, op een andere tijd voorbij Jupiter leken te komen dan op een ander moment in het jaar. Het maximale verschil bleek zo'n 1000 seconden in een half jaar (verschil in tijd dat de aarde het dichtst bij Jupiter staat en het verst van Jupiter verwijderd is). Newton had toen al vastgesteld dat de baan van de aarde een diameter moest hebben van ongeveer $3 \cdot 10^{11}$ m. Met de formule $s = v \cdot t$ kon Römer dus vaststellen dat de lichtsnelheid $v = 3 \cdot 10^8$ m/s. Deze snelheid kreeg een eigen symbool 'c'. Daarmee is $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Eerst was dat getal nog niet helemaal precies. In latere en andere experimenten werd dit getal steeds nauwkeuriger.

Wat bijzonder was, was dat men er vanuit ging dat als de aarde naar Jupiter toe bewoog, men ook een hogere snelheid zou moeten meten vanwege het Doppler effect. Maar dat bleek niet zo te zijn. Die snelheid was en bleef c. Daarom werd op een zeker moment aangenomen dat de snelheid van het licht nooit hoger kan komen dan c. Als gevolg daarvan ging men bedenken dat als twee snelheden worden opgeteld, er een formule moest komen die er voor zou zorgen dat die twee opgetelde snelheden niet boven de snelheid c zou kunnen komen. Die formule is vrij eenvoudig zelf te verzinnen. Men rekent normaal gesproken met snelheden als volgt: snelheid v + snelheid w is de nieuwe snelheid u [m/s]. Daarmee hebben we de eenvoudige formule: $u = v + w$ [m/s]. Maar dit geldt alleen voor $v \ll c$. Voor snelheden in de buurt van c, krijgen we een nieuwe formule, die overigens altijd geldig is, ook voor lage snelheden ($v \ll c$). Dat wordt de formule:

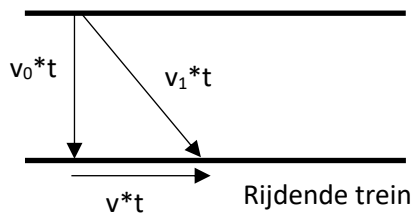
$$u = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} \quad [\text{m/s}] \quad \{1\}$$

Deze formule gaan we vooral gebruiken voor $v \leq c$. Ga dit na voor de volgende situaties: Stel een trein rijdt $v = 30$ m/s en iemand loopt in de richting van de rijdende trein naar voren met een snelheid $w = 2$ m/s. Als we deze snelheden invullen in formule 1, dan krijgen we 31,9999936 m/s, dus afgerond ook 32 m/s. Het verschil is zo klein dat de vereenvoudigde formule $u = v + w$ voor lage snelheden voldoet. Stel dat we nu snelheden nemen die in de buurt komen van c, als volgt; stel $v = 2 \cdot 10^8$ m/s en $w = 2,4 \cdot 10^8$ m/s. Invulling in formule 1 geeft dan $u = 2,28 \cdot 10^8$ m/s. Nog een voorbeeld: Als $v = c$ en $w = c$, dan blijkt $u = c$.

Lorentz en Einstein zijn rond het jaar 1900 hiermee verder gegaan. Door dit fenomeen bleken een paar zaken. Lengtes bleken bijvoorbeeld korter te worden (Lorentz contractie genoemd) als objecten zich verplaatsen. Vanzelfsprekend is iets dergelijks pas goed waar te nemen bij hogere snelheden. Tijden duurden langer en massa's werden zwaarder. Onderstaand het gedachtenexperiment van Einstein, waaruit blijkt dat de tijd langer duurt als we te maken krijgen met (hoge) snelheden.

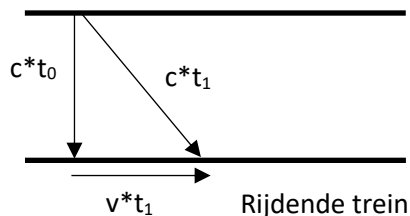
Hij ging eerst uit van een situatie die wij kennen bij langzame snelheden. Zie onderstaand figuur. Stel dat een bal met snelheid v_0 heen en weer stuitert in een rijdende trein. Iemand in de trein ziet de bal met een zekere snelheid v_0 van plaats heen en weer gaan en de afstand $v_0 \cdot t$ afleggen. Iemand buiten de trein 'ziet' diezelfde

bal heen en weer gaan, maar ervaart een hogere snelheid v_1 van de bal door de snelheid v van de trein. Daardoor legt die bal een grotere afstand $v_1 * t$ af. Zie onderstaand figuur.



Volgens Pythagoras krijgen we dan: $v_1 * t = \sqrt{v_0^2 * t^2 + v^2 * t^2}$ zodat $v_1 = \sqrt{v_0^2 + v^2}$ [m/s]

Nu gaan we dit nogmaals doen, maar de bal wordt vervangen door een lichtflits welke zich met snelheid c verplaatst. Omdat c de hoogste snelheid is zal bij de schuine pijl de snelheid voor de waarnemer buiten de trein, niet een hogere snelheid dan c zijn, omdat dat onmogelijk is, maar dezelfde snelheid c zijn. Omdat er wel verschil is, moet er nu iets aan de hand zijn met de tijd t_1 . We geven die tijden in onderstaand figuur daarom een index met t_0 en t_1 . De trein rijdt nog steeds met snelheid v :



Volgens Pythagoras' krijgen we dan $c^2 t_1^2 = c^2 t_0^2 + v^2 t_1^2$ waaruit volgt:

$$t_1 = t_0 * \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [s] \quad \{2\}$$

Als we in deze vergelijking een willekeurige snelheid v invullen, zal de nieuwe tijd t_1 langer duren dan de oude tijd t_0 .

Uit bovenstaande volgt ook dat als de trein sneller gaat rijden, de afstand $c * t_1$ steeds groter wordt. Als de trein snelheid c heeft zal de afstand $c * t_1$ oneindig groot zijn. De lichtflits zal voor een waarnemer buiten de trein nooit de 'overkant' kunnen bereiken. Bedenk dat de waarnemer zelf stil staat. De trein gaat met c naar rechts en de waarnemer zal dus nooit een lichtflits ervaren die de overkant bereikt. Dit komt omdat die waarneming zelf ook met snelheid c gebeurt, en deze waarneming de waarnemer niet meer kan bereiken

Een praktisch voorbeeld waarbij met dit effect rekening wordt gehouden is het GPS systeem. De GPS satellieten hebben, omdat ze verder van de aarde afstaan, een hogere omloopsnelheid dan de 'omloopsnelheid' van de waarnemer op aarde. De klokken (met t_0) in de GPS satellieten lopen daarom bewust vooraf ingesteld iets sneller, zodanig dat de waarnemer op de aarde de juiste kloksnelheid (met t_1) ervaart. (Iemand die de klok van de GPS satelliet, die op de aarde nog aan de grond staat, instelt of meereist met de satelliet, denkt dat de klok in de satelliet te snel loopt).

Hoe kan het dan dat lengtes kleiner worden en massa's groter. Veronderstel dat we een liniaal van precies 1 m hebben. We gaan links tegen de liniaal duwen in de lengterichting van de liniaal met een bepaalde snelheid. De hele liniaal gaat nu meebewegen. Bedenk dat de informatie voor het meebewegen intern in de liniaal wordt doorgegeven met snelheid c . Voor $v \ll c$ betekent dit dus dat de liniaal in zijn geheel feitelijk 1 m blijft. Maar als we beginnen met duwen met een zeer hoge snelheid, bijvoorbeeld $v = 0,8c$, dan is de linker kant van de liniaal al op 0,8 m naar rechts gevorderd, als de rechter kant van de liniaal met snelheid c informatie krijgt om naar rechts te bewegen. De liniaal is daarom een stuk korter (0,2 m) geworden en de 'soortelijke massa' een stuk

groter (gedeeld door 0,2). Een dergelijk verband vonden we op een wat nettere manier ook al in formule {1} voor de tijd. We krijgen derhalve zonder verder bewijs:

$$l_1 = l_0 * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [\text{m}] \quad \{3\}$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [\text{kg}] \quad \{4\}$$

Hierin is l_0 de lengte en m_0 de massa in rust.

Dus lengtes worden bij zeer hoge snelheden duidelijk kleiner en massa's worden zwaarder. Maar zoals hierboven beschreven ... het is relatief. Het is dus niet het geval voor een 'persoon' die meereist, maar wel waarneembaar voor buitenstaanders.

Nu gaan we de stap maken naar Einsteins beroemde formule. Uit de natuurkunde is bekend dat de verandering van de energie dE [J] afhankelijk is van de kracht F [N] en de afgelegde weg dx [m], als volgt:

$$dE = F dx \quad [\text{J}]$$

Met $F = ma$, waarbij m de massa [kg] is en a is de versnelling [m/s] krijgen we:

$$dE = F dx = m a dx = m \frac{dv}{dt} dx = m \frac{dv}{dt} v dt = m v dv \quad [\text{J}]$$

$$\text{Dus } E = \int m v dv \quad [\text{J}] \quad \{5\}$$

We gaan eerst uit van de situatie dat $v \ll c$. Omdat m in formule 5 dan als een constante mag worden beschouwd, krijgen we $E = m \int v dv = \frac{1}{2} m v^2$ [J]. Dus de formule voor de kinetische energie is $E = \frac{1}{2} m v^2$ [J] voor $v \ll c$.

Wat moeten we dan schrijven voor de situatie $v \leq c$ waarbij de massa niet meer constant is en er bovendien iets aan de hand is met het optellen van snelheden.

Eerst vullen we in formule [5] in dat m afhankelijk is van de snelheid v :

$$E = \int m_1 v dv = \int \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v dv \quad [\text{J}] \quad \{6\}$$

Deze formule is nog niet klaar om uit te werken, omdat ook de snelheid v nader moet worden bekeken. Dit omdat dv betekent dat er een verandering is van de snelheid, dus we gaan van een bepaalde snelheid naar een andere snelheid. Dan moeten we dus ook formule [1] meenemen. We schrijven formule [6] nogmaals op, en maken dv daarin voor de herkenbaarheid tijdelijk vetgedrukt. Met die **dv** gaan we daarna verder.

$$E = \int \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \mathbf{dv} \quad [\text{J}] \quad \{7\}$$

Dat gaat als volgt:

$$\mathbf{dv} = v + dv - v \quad [\text{m/s}]$$

Om straks **dv** weer terug in te vullen in formule [7] herschrijven we e.e.a. al volgt:

$$dv = (v + \mathbf{dv}) - v \quad [\text{m/s}]$$

Omdat 2 snelheden worden opgeteld moeten we deze formule herschrijven met formule [1], als volgt

$$dv = \frac{v + \mathbf{dv}}{1 + \frac{v \mathbf{dv}}{c^2}} - v \quad [\text{m/s}]$$

$$dv = \frac{v + \mathbf{dv} - v - \frac{v^2}{c^2} \mathbf{dv}}{1 + \frac{v \mathbf{dv}}{c^2}} \quad [\text{m/s}]$$

$$dv = \frac{dv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v dv}{c^2}} \text{ [m/s]}$$

Omdat dv klein is zal $\frac{v dv}{c^2} \approx 0$ zodat

$$dv \approx dv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \text{ [m/s]}$$

En daardoor krijgen we met weglating van 'ongeveer' teken

$$dv = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ [m/s]}$$

Deze laatste formule zetten we nu in formule [7]

$$E = \int \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ [J]}$$

Dit is te herschrijven in

$$E = \int \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv \text{ [J]}$$

Deze integraal moet nog worden opgelost. Het is geen simpele standaardintegraal maar deze is wel terug te vinden als standaardintegraal in diverse literatuur (zie bv Wikipedia). We krijgen dan:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ [J]} \quad \{8\}$$

Voor objecten in rust, dus $v = 0$, krijgen we.

$$E = m_0 c^2 \text{ [J]} \quad \{9\}$$

Kortweg:

$$E = mc^2 \text{ [J]}$$

Deze formule {9} betekent dat er een vast verband c^2 is tussen energie en massa. Gezien de grootte van c^2 heeft een kleine massa in rust daarom een enorme hoeveelheid energie. Het veranderen van een massa betekent dus dat veel energie vrij komt of moet worden toegevoegd. Formule {8} is ook interessant, want daarin kunnen we zien dat als $v = c$, de hoeveelheid energie oneindig zou moeten zijn. Dus als we een massa in rust willen gaan voortbewegen met snelheid c , dan hebben we oneindig veel energie nodig. We kunnen derhalve een massa geen hogere snelheid geven dan snelheid c .

Bram Steennis, 28 augustus 2022